

DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DE DARCY-WEISBACH.

Método (1): análisis dimensional pi-Buckingham:

Se sabe tras diversos experimentos que la pérdida de carga depende de una función de la densidad, el gradiente de presiones, la rugosidad relativa etc.:

$$f\left(\Delta p/l, \rho, V, D, \mu, \varepsilon\right)$$

Las variables anteriores, dimensionalmente tienen la siguiente estructura:

$$[\rho] = [ML^{-3}T^0]; [\mu] = [ML^{-1}T^{-1}]; \left[\frac{\Delta p}{l}\right] = [M^0L^{-2}T^{-2}]; [V] = [M^0LT^{-1}]; [D] = [\varepsilon] = [M^0LT^0]$$

Tomamos el grupo (ρ, V, D) :

$$\pi_1 = \rho^{x_1} \cdot V^{y_1} D^{z_1} \mu$$

$$\pi_2 = \rho^{x_2} \cdot V^{y_2} D^{z_2} \frac{\Delta p}{l}$$

$$\pi_3 = \rho^{x_3} \cdot V^{y_3} D^{z_3} \varepsilon$$

$$[\pi_1] = [ML^{-3}T^0]^{x_1} [M^0LT^{-1}]^{y_1} [M^0LT^0]^{z_1} [ML^{-1}T^{-1}] \rightarrow (x_1, y_1, z_1) \equiv (-1, -1, -1) \rightarrow \pi_1 = \frac{\mu}{\rho V D}$$

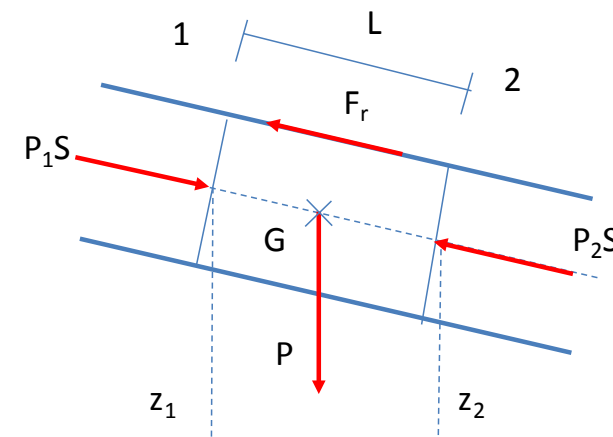
$$[\pi_2] = [ML^{-3}T^0]^{x_2} [M^0LT^{-1}]^{y_2} [M^0LT^0]^{z_2} [M^0L^{-2}T^{-2}] \rightarrow \pi_2 = \frac{\left(\frac{\Delta p}{l}\right) \cdot D}{\rho V^2}$$

$$[\pi_3] = [ML^{-3}T^0]^{x_3} [M^0LT^{-1}]^{y_3} [M^0LT^0]^3 [M^0LT^0] \rightarrow \pi_3 = \frac{\varepsilon}{D} = \varepsilon_r \text{ (rugosidad relativa)}$$

$$\Phi\left(\frac{1}{Re}, \frac{\left(\frac{\Delta p}{l}\right) \cdot D}{\rho V^2}, \varepsilon_r\right) = 0 \rightarrow \frac{\left(\frac{\Delta p}{l}\right) \cdot D}{\rho V^2} = f\left(\frac{1}{Re}, \varepsilon_r\right) \rightarrow \Delta p = \frac{l \cdot \rho \cdot V^2}{D} f\left(\frac{1}{Re}, \varepsilon_r\right)$$

$$h_f = \frac{\Delta p}{\rho \cdot g} = \frac{l \cdot \rho \cdot V^2}{2 \cdot D \cdot g} \cdot 2 \cdot f\left(\frac{1}{Re}, \varepsilon_r\right) \rightarrow 2 \cdot f\left(\frac{1}{Re}, \varepsilon_r\right) = f \rightarrow h_f = f \cdot \frac{L V^2}{D 2g}$$

Método (2): mediante equilibrio de fuerzas.



Calculamos el peso del fluido que atraviesa la tubería en cuestión:

$$P = m \cdot g = \rho \cdot V \cdot g = \rho \cdot S \cdot L \cdot g = S \cdot L \cdot \gamma \rightarrow \gamma = \frac{\rho}{g}$$

Por otra parte este fluido atraviesa una tubería con lo que se producirá cierta fricción:

$$F_r = \tau \cdot c \cdot L \rightarrow \text{donde } c = \text{perímetro y } \tau = \text{esfuerzo cortante}$$

Proyectando y aplicando ecuaciones del equilibrio de fuerzas según el croquis anterior:

$$P_1 S - P_2 S + S \cdot L \cdot \gamma \cdot \sin \theta = F_r = \tau \cdot c \cdot L \rightarrow \text{ahora dividimos entre } S \cdot \gamma:$$

$$\frac{P_1}{\gamma} - \frac{P_2}{\gamma} + L \cdot \sin \theta = \frac{\tau \cdot c \cdot L}{S \cdot \gamma} \rightarrow \text{trig.: } z_1 - z_2 = L \sin \theta \rightarrow \left(\frac{P_1}{\gamma} - z_1 \right) - \left(\frac{P_2}{\gamma} - z_2 \right) = \frac{\tau \cdot c \cdot L}{S \cdot \gamma}$$

Donde θ es la inclinación de la tubería con respecto a la horizontal

Y el primer término resulta ser la diferencia de las alturas piezométricas entre los puntos 1 y 2, es decir, la pérdida de carga que se produce en ese trayecto es la diferencia de las alturas piezométricas entre los puntos 1 y 2, luego:

$$h_r = \frac{\tau \cdot c \cdot L}{S \cdot \gamma}$$

Por otra parte, según la ecuación de Fanning, el esfuerzo cortante τ se puede calcular de acuerdo a la siguiente expresión:

$$\tau = F \cdot \rho \cdot \frac{v^2}{2}$$

Donde F es el coeficiente de fricción de Fanning para la tubería. Además es muy importante subrayar que el coeficiente de Fanning F es un cuarto del coeficiente de fricción f de la ecuación de Darcy-Weisbach.

$$h_r = \frac{\tau \cdot c \cdot L}{S \cdot \gamma} = F \cdot \rho \cdot \frac{v^2}{2} \cdot \frac{S}{c} \cdot \frac{L \cdot g}{\rho} = F \cdot \frac{v^2 \pi \cdot \frac{D^2}{4}}{2 \pi D} \cdot L = F \cdot \frac{v^2 D}{2} \cdot L$$

$$F = 4f \rightarrow h_r = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g}$$

Donde h_r se mide en unidades de presión y es función del número de Reynolds y dependiendo del régimen del flujo, f se determinará de un modo u otro. Por ejemplo y para régimen laminar:

$$f = \frac{64}{Re} \rightarrow \text{siendo } Re = \frac{\rho \cdot v \cdot D}{\mu}$$