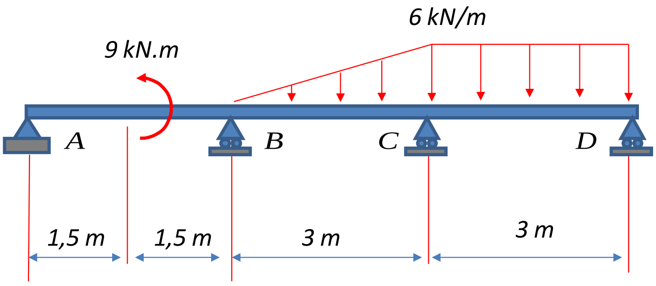
Sabiendo que la rigidez a flexión de la viga de la figura tiene un valor de EI, y que esta es constante a lo largo de toda su longitud, se pide calcular los siguientes apartados:



a) DSI.

b) Reacciones usando método del equilibrio.

c) Diagramas de esfuerzo.

a) <u>DSI:</u>

$\text{EDSI} = 5 - 3 = 2$

$\text{IDOF} = 3(3-1) = 6$

$\text{IL} = 2.3(2-1) = 6$

$\text{IDSI} = 2 - 3 = -1$

$\text{DSI} = \text{EDSI} + \text{IDSI} = 1$

La estructura está completamente ligada, sin embargo, debido a que el DSI es igual a 1, no es posible calcular el valor de las reacciones en los apoyos utilizando simplemente las ecuaciones clásicas de equilibrio (equilibrio de fuerzas, momentos y rótulas).

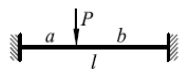
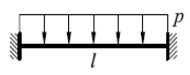
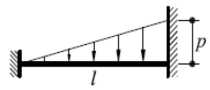
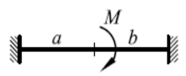
b) <u>Reacciones con el método del equilibrio:</u>

Para empezar, veamos una breve explicación genérica del método que vamos a utilizar. Si se quiere conocer realmente bien esta metodología, se recomienda consultar otras referencias adicionales.

1) Para resolver el problema, partimos de la **ecuación de los tres giros** para vigas hiperestáticas:

$$\left(\frac{EI}{l}\right)_{AB}\phi_A + 2\left[\left(\frac{EI}{l}\right)_{AB} + \left(\frac{EI}{l}\right)_{BC}\right]\phi_B + \left(\frac{EI}{l}\right)_{BC}\phi_C = -\frac{M^o_{BC} + M^o_{BA}}{2}$$

Donde Φ son los giros en los extremos de cada vano. Cómo ya vimos en el anterior ejercicio de estructuras hiperestáticas, los momentos del segundo término, son los del empotramiento perfecto que se pueden obtener de múltiples referencias:

CARGA	M^o_{AB}	M^o_{BA}
	$+\frac{Pab^2}{l^2}$	$-\frac{Pa^2b}{l^2}$
	$+\frac{pl^2}{12}$	$-\frac{pl^2}{12}$
	$+\frac{pl^2}{30}$	$-\frac{pl^2}{20}$
	$-b(2a-b)\frac{M}{l^2}$	$-a(2b-a)\frac{M}{l^2}$

2) Por otra parte, si lo que tenemos son vanos de igual longitud, entonces, la ecuación queda:

$$\boldsymbol{\phi_A + 4\phi_B + \phi_C = -\frac{1}{2}\left(\frac{l}{EI}\right)(M^o_{CB} + M^o_{BA})}$$

Y particularizando para los apoyos extremos articulados (no voladizos):

$$\phi_A + 2\phi_B = \frac{1}{2}\left(\frac{l}{EI}\right)(M_A - M^o_{AB})$$

$$\phi_X + 2\phi_Y = \frac{1}{2}\left(\frac{l}{EI}\right)(M_Y - M^o_{YX})$$

De las ecuaciones anteriores y gracias a que sabemos que el momento en los extremos es igual a cero, se obtendrán Φ_A, Φ_B, Φ_C etc.

3) Una vez calculados los giros, se utiliza la ecuación de la elástica en cada vano:

$$M_{BA} = \left(\frac{EI}{l}\right)_{AB} (2.\phi_B + \phi_A) + M^o_{BA}$$

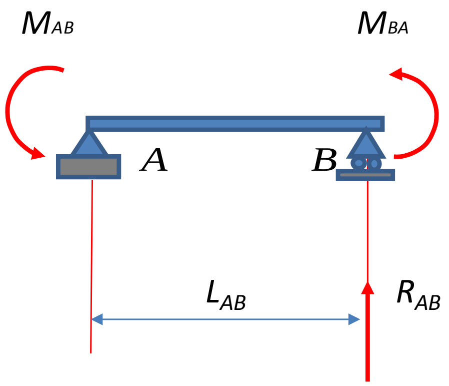
$$M_{BC} = \left(\frac{EI}{l}\right)_{BC} (2.\phi_B + \phi_C) + M^o_{BC}$$

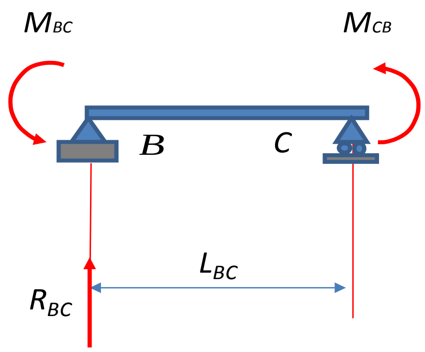
Donde además se cumple que:

$$\sum M_B = M_{BA} + M_{BC} = 0$$

4) Una vez calculados los momentos, es posible abordar el cálculo de las reacciones trabajando tramo por tramo, tal y como se muestra en la figura siguiente. De esta forma calcularemos R_{AB} y R_{BC} y finalmente:

$$\mathbf{R_B = R_{BA} + R_{BC}}$$





Y este es el método genérico a seguir para la resolución. Lo importante es entender y recordar el proceso:

$$\boldsymbol{\phi_j \rightarrow [\,] \rightarrow (M_{ij}\,, M_{jk}) \rightarrow ec \rightarrow M_i \rightarrow eq \rightarrow R_i}$$

Veamos ahora como hacerlo para la viga del enunciado. Para empezar aplicamos la ecuación de los tres giros a cada tramo:

$$2\phi_A + \phi_B = \frac{1}{2}\left(\frac{l}{EI}\right)(M_A - M^o_{AB})$$

$$\phi_A + 4\phi_B + \phi_C = -\frac{1}{2}\left(\frac{l}{EI}\right)(M^o_{BC} + M^o_{BA})$$

$$\phi_B + 4\phi_C + \phi_D = -\frac{1}{2}\left(\frac{l}{EI}\right)(M^o_{CD} + M^o_{CB})$$

$$\phi_C + 2\phi_D = \frac{1}{2}\left(\frac{l}{EI}\right)(M_D - M^o_{DC})$$

Determinamos ahora los “momentos sub-cero” entrando en las tablas:

$$M^o_{AB} = \frac{M}{4} = \frac{9}{4} = 2{,}25\ \mathrm{kN.m}$$

$$M^o_{BA} = \frac{M}{4} = \frac{9}{4} = 2{,}25\ \mathrm{kN.m}$$

$$M^o_{BC} = \frac{ql^2}{30} = \frac{6.3.3}{30} = 1{,}8\ \mathrm{kN.m}$$

$$M^o_{CB} = -\frac{ql^2}{20} = \frac{6.3.3}{20} = -2{,}7\ \mathrm{kN.m}$$

$$M^o_{CD} = \frac{ql^2}{12} = \frac{6.3.3}{12} = 4{,}5\ \mathrm{kN.m}$$

$$M^o_{DC} = -\frac{ql^2}{12} = \frac{6.3.3}{12} = -4{,}5\ \mathrm{kN.m}$$

$$M_A = M_D = 0$$

Y una vez calculados nos presentamos con un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas, en el que identificamos la matriz **A** y el vector **b**:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{l}{EI}\right)(M_A - M^o_{AB}) = -3{,}37 \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{l}{EI}\right)(M^o_{BC} + M^o_{BA}) = -6{,}06 \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{l}{EI}\right)(M^o_{CD} + M^o_{CB}) = -2{,}7 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{l}{EI}\right)(M_D - M^o_{DC}) = 6{,}75 \end{pmatrix}$$

Para resolver este sistema, recomiendo el uso de calculadora programable o de cualquier calculadora de sistemas online. Si fuera necesario hacerlo a mano, se podría utilizar la factorización LU, pero eso ya es otra historia, que contaré en otro post. La solución de cada Φ es la siguiente:

$$(\boldsymbol{\phi_A}, \boldsymbol{\phi_B}, \boldsymbol{\phi_C}, \boldsymbol{\phi_D}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{EI}}(-\mathbf{1.27}, -\mathbf{0.82}, -\mathbf{1.5}, \mathbf{4.12})$$

Ahora, con estos valores podemos resolver las ecuaciones de la elástica vistas antes:

$$M_{AB} = 2\left(\frac{EI}{l}\right)(2\phi_A + \phi_B) + M^o_{AB} =$$

$$= \frac{2}{3}.(2(-1{,}27) - 0{,}821) + 2{,}25 = 0 \text{ kN.m}$$

$$M_{BA} = 2\left(\frac{EI}{l}\right)(2\phi_B + \phi_A) + M^o_{BA} =$$

$$= \frac{2}{3}.\big((-1{,}27) - 0{,}82.2\big) + 2{,}25 = 0{,}3 \text{ kN.m}$$

$$M_{BC} = 2\left(\frac{EI}{l}\right)(2\phi_B + \phi_C) + M^o_{BC} =$$

$$= \frac{2}{3}.(2(-0{,}82) - 1{,}5) + 1{,}8 = -0{,}3 \text{ kN.m}$$

$$M_{CB} = 2\left(\frac{EI}{l}\right)(2\phi_C + \phi_B) + M^o_{CB} =$$

$$= \frac{2}{3}.(2(-1{,}5) - 0{,}821) - 2{,}7 = 5{,}2 \text{ kN.m}$$

$$M_{CD} = 2\left(\frac{EI}{l}\right)(2\phi_C + \phi_D) + M^o_{CD} =$$

$$= \frac{2}{3}.(2(-1{,}50) + 4{,}12) + 4{,}5 = 5{,}25 \text{ kN.m}$$

$$M_{DC} = 2\left(\frac{EI}{l}\right)(2\phi_D + \phi_C) + M^o_{DC} =$$

$$= \frac{2}{3}.(2(4{,}12) - 1{,}50) - 4{,}5 = 0 \text{ kN.m}$$

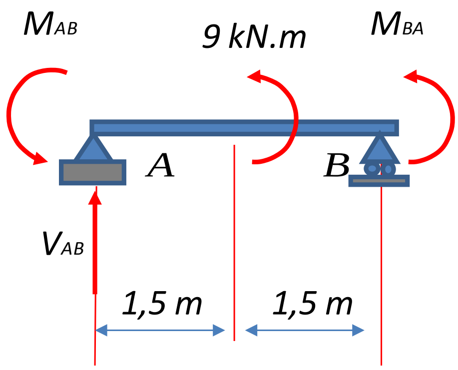
Una vez hecho lo anterior, iremos vano a vano calculando las reacciones a partir de las ecuaciones del equilibrio teniendo en cuenta además que:

$$R_A = R_{AB}$$

$$R_B = R_{BA} + R_{BC}$$

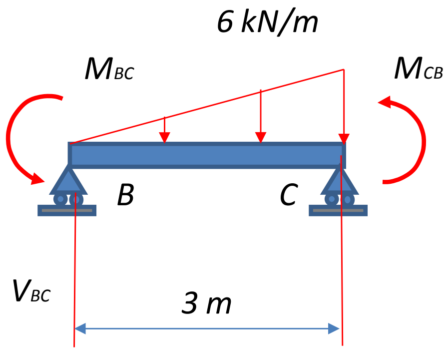
$$R_C = R_{CB} + R_{CD}$$

$$R_D = R_{DC}$$



$$\sum M_B = 3V_{AB} - 9 - 0{,}3 = 0$$

$$\mathbf{V_{AB} = V_A = 3,1\ kN} \rightarrow V_{BA} = -3{,}1 \text{ kN}$$

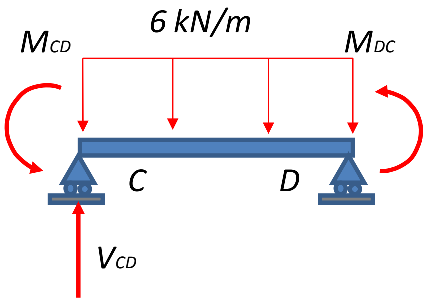


$$\sum M_C = 3V_{BC} - 6.\frac{3}{2}.1 + 0{,}3 + 5{,}2 = 0$$

$$V_{BC} = 1{,}15 \text{ kN}$$

$$V_{CB} = 9 - 1{,}15 = 7{,}85 \text{ kN}$$

$$\mathbf{V_B} = V_{AB} + V_{BC} = -3{,}1 + 1{,}15 = \mathbf{-1,95\ kN}$$



$$\sum M_D = 3V_{CD} - 6.3.\frac{3}{2} - 5{,}25 = 0$$

$V_{CD} = 10{,}75\ \mathrm{kN}$

$\mathbf{V_D} = 18 - 10{,}75 = \mathbf{7{,}25\ kN}$

$\mathbf{V_C} = V_{CB} + V_{CD} = 10{,}75 + 7{,}85 = \mathbf{18{,}6\ kN}$

Recopilando resultados:

$\mathbf{V_A = 3{,}1\ kN}$

$\mathbf{V_B = -1{,}95\ kN}$

$\mathbf{V_C = 18{,}6\ kN}$

$\mathbf{V_D = 7{,}25\ kN}$

Y de esta forma ya hemos determinado el valor de las reacciones. Hay que observar la gran diferencia entre la dificultad de calcular los apoyos en una viga isostática y otra hiperestática!

c) <u>Diagramas:</u>

Se pueden obtener fácilmente haciendo cortes en cada tramo, al igual que hemos hecho en numerosos ejercicios anteriormente. Ahora una vez hemos determinado las reacciones de la viga, se procede de igual manera que si fuera isostática.