

Qué es mayor 101^n o $100^n + 99^n$? (siendo n un número entero positivo)

Solución: en este ejercicio vamos a determinar cuál de los dos términos es mayor si 101^n o la suma de $100^n + 99^n$. Al trabajar con el parámetro n , se tiene que analizar si uno de los términos es siempre mayor que el otro, o si por el contrario, esta condición varía en función del valor que tome n .

101^n o $99^n + 100^n$? Para resolver el problema, partimos del siguiente cociente y decidiremos en función de si este es mayor o menor que uno:

$$\frac{101^n - 99^n}{100^n} > 1, \text{ entonces } 101^n \text{ es mayor que } 100^n + 99^n \rightarrow \text{desigualdad(a)}$$

$$\frac{101^n - 99^n}{100^n} < 1, \text{ entonces } 101^n \text{ es menor que } 100^n + 99^n \rightarrow \text{desigualdad(b)}$$

La expresión anterior también se puede escribir de la siguiente manera:

$$\frac{101^n - 99^n}{100^n} = \frac{(100 + 1)^n - (100 - 1)^n}{100^n}$$

Ahora, aplicando la fórmula del binomio de Newton:

$$(a \pm b)^n = \binom{n}{0} a^n \pm \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 \pm \dots \pm \binom{n}{n} b^n$$

Podemos calcular la expresión anterior restando ambos términos:

$$\begin{aligned} (100 + 1)^n &= \binom{n}{0} 100^n + \binom{n}{1} 100^{n-1} \cdot 1 + \binom{n}{2} 100^{n-2} 1^2 + \dots + \binom{n}{n} 1^n \\ - (100 - 1)^n &= \binom{n}{0} 100^n - \binom{n}{1} 100^{n-1} \cdot 1 + \binom{n}{2} 100^{n-2} 1^2 - \dots - \binom{n}{n} 1^n \end{aligned}$$

$$101^n - 99^n = 2 \cdot \left[\binom{n}{1} 100^{n-1} \cdot 1 + \binom{n}{3} 100^{n-3} \dots \right]$$

Recordemos que:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{(n-m)! n!}$$

Luego la expresión anterior queda:

$$2 \left(\frac{n}{100} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3! 100} + \dots \right) = (*)$$

Queda claro que este término será mayor que uno cuando n sea mayor o igual que 50. De hecho también lo es para 49, tal y como se muestra a continuación.

$$(*) (n = 49) = 2 \left(\frac{49}{100} + \frac{49(49-1)(49-2)}{3! 100^3} + \dots \right) > 2 \left(\frac{49}{100} + \frac{18424}{100^3} \right) > 2 \left(\frac{49}{100} + \frac{100^2}{100^3} \right) = 1$$

Se demuestra de esta forma que 101^n es mayor que la suma de $100^n + 99^n$ cuando $n \geq 49$ (desigualdad a). Ahora y para dar una solución rigurosa al enunciado, solo falta demostrar que sucede lo contrario para n menores que 49. Para ello veamos que ocurre con $n=48$.

$$(*) (n = 48) = \left(\frac{48}{100} + \frac{48.47.46}{3! 100^3} + \frac{48.47.46.45.44}{5! 100^5} + \frac{48.47.46.45.44.43.42}{7! 100^7} \dots \right) = (**)$$

El objetivo es ahora calcular la suma anterior, o al menos acotarla. Podemos convertirla en una progresión geométrica considerando que:

$$n^k \geq \binom{n}{k} \cdot k!$$

Utilizando esta desigualdad:

$$(**) < 2 \left(\frac{48}{100} + \frac{48^3}{(1.2.3) \cdot 100^3} + \frac{48^5}{(1.2.3)(2.3) \cdot 100^3} + \frac{48^7}{(1.2.3)(2.3) \cdot 100^5} \dots \right) =$$

$$= 2 \left[\frac{48}{100} + \frac{1}{6} \left(\frac{48}{100} \right)^3 + \frac{1}{6^2} \left(\frac{48}{100} \right)^5 + \dots \right] = (***)$$

Gracias a la forma en la que hemos escrito este término, se comprueba que se trata de una progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{6} \left(\frac{48}{100} \right)^2$. Recordemos que la fórmula que se utiliza para calcular la suma de los infinitos los términos de una serie de razón inferior a la unidad se obtiene utilizando la siguiente fórmula:

$$S = \frac{a_1}{1-r}$$

Luego la suma anterior queda acotada en 1 (desigualdad b):

$$(***) = 2 \frac{\frac{48}{100}}{1 - \frac{1}{6} \left(\frac{48}{100} \right)^2} = \frac{9600}{9616} < 1$$

De esta forma llegamos a la conclusión de que:

$100^n + 99^n > 101^n$ si $n < 49$ mientras que 101^n es mayor para $n \geq 49$