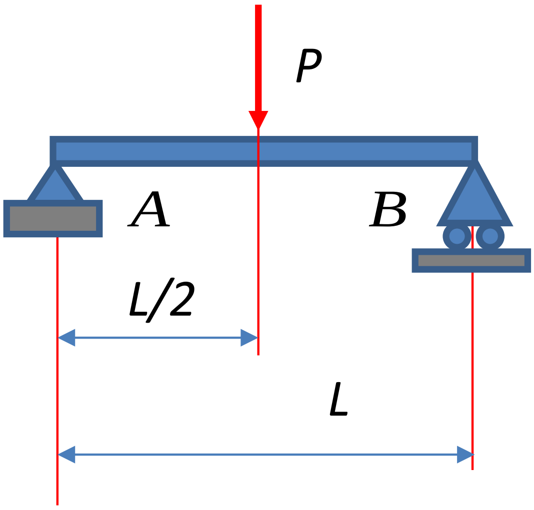
Se tiene una carga P aplicada en la mitad de una viga biapoyada con un módulo elástico E, de sección con momento de inercia I_x. Determinar la deflexión máxima de la viga utilizando tres métodos diferentes.



<u>**SOLUCIÓN:**</u>

1) Mediante la ecuación general de la deflexión.

$$y''(x) = M(x)/EI$$

$$M(x) = \frac{Px}{2}$$

$$y''(x).E.I = \frac{Px}{2}$$

$$y'(x).E.I = \frac{Px^2}{4} + C$$

Ahora utilizando condiciones de contorno:

$$y'\left(x = \frac{L}{2}\right) = 0$$

$$C = -\frac{PL^2}{16}$$

Integrando de nuevo:

$$y(x).E.I = \frac{Px^3}{12} - \frac{PL^2x}{16} + D$$

Utilizando de nuevo condiciones de contorno:

$$y(x = 0) = 0 \rightarrow D = 0$$

$$y(x).E.I = \left(\frac{Px^3}{12} - \frac{PL^2x}{16}\right)$$

Y como se ve que la flecha máxima de la viga se encuentra en el punto medio, particularizamos en la ecuación anterior:

$$y(x = L/2) = \frac{1}{EI}\left(\frac{PL^3}{96} - \frac{PL^3}{32}\right)$$

$$\Delta \mathbf{l} = \frac{\mathbf{PL^3}}{\mathbf{48EI}}$$

2) Con la energía de deformación y la ecuación de Clapeyron.

$$U_M = \int_0^L \frac{M_x^2.dx}{2.E.I_x}$$

$$2.E.I.U_M = 2\int_0^{L/2} \left(\frac{Px}{2}\right)^2 dx = 2\left[\frac{P^2x^3}{12}\right]_0^{L/2}$$

$$U_M = \frac{2.P^2L^3}{2.E.I.96}$$

Formula de Clapeyron:

$$W = \frac{1}{2}\sum P_i\delta_i = \frac{P\delta}{2}$$

Y ahora igualando el trabajo a la energía de deformación:

$$U_M = W \rightarrow \frac{P\delta}{2} = \frac{P^2L^3}{E.I.96}$$

$$\boldsymbol{\delta = \Delta l = \frac{PL^3}{48EI}}$$

3) Utilizando el teorema de Castigliano.

El desplazamiento se obtiene directamente integrando la siguiente expresión:

$$\delta = \frac{\delta U}{\delta P} = \frac{\delta}{\delta P}\left(\int_0^L \frac{M_x^2 . dx}{2. E. I_x}\right) =$$

$$= \int_0^L M \frac{\delta M}{\delta P}\frac{dx}{EI_x}$$

$0 \leq x \leq L/2$

$$M(x) = \frac{Px}{2}$$

$$\frac{\delta M(P)}{\delta P} = \frac{x}{2}$$

$L/2 \leq x \leq L$

$$M(x) = \frac{P(L-x)}{2}$$

$$\frac{\delta M(P)}{\delta P} = \frac{(L-x)}{2}$$

$$= \int_0^{L/2} \frac{Px}{2}\frac{x}{2}\frac{dx}{E. I_x} + \int_{L/2}^{L} \frac{P(L-x)}{2}\frac{(L-x)}{2}\frac{dx}{E. I_x} =$$

$$= \frac{P}{4EI}\left(\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{L/2} + \left[l^2x + \frac{x^3}{3} - lx^2\right]_L^{L/2}\right) =$$

$$\boldsymbol{\delta = \Delta l = \frac{PL^3}{48EI}}$$

Y de esta forma comprobamos que existen varias formas para calcular la flecha máxima de la viga.